準非拡大写像に関する強収束定理とその応用 (バナッハ空間及び関数空間論における幾何学的構造の研究とその応用)

数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 149-159

準非拡大写像に関する強収束定理とその応用
(STRONG CONVERGENCE THEOREMS FOR GENERALIZED NONEXPANSIVE MAPPINGS AND THEIR APPLICATIONS)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
名古屋大学情報連携統括本部
(INFORMATION AND COMMUNICATIONS HEADQUARTERS, NAGOYA UNIVERSITY)

1. はじめに

C を実ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像 (nonexpansive mapping), すなわち, 任意の C の元 x, y に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つとする. このとき, T の不動点 (fixed point) 全体の集合を $F(T)$ で表すこととする. 中條-高橋 [16] は Solodov-Svaiter [19] にヒントを得て, 非拡大写像の不動点を求める次の点列近似法を提案した.

$$\begin{cases} x_1 = x \in C \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n, \\ H_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in C : \langle x - x_n, x_n - z \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ とし, $P_{H_n \cap W_n}$ は C から $H_n \cap W_n$ の上への距離射影 (metric projection) とする. そして彼らは, この点列 $\{x_n\}$ が $P_{F(T)}x$ に強収束することを示した. ただし, $P_{F(T)}$ は C から $F(T)$ の上への距離射影である. この手法はハイブリッド法 (hybrid method) と呼ばれている. 2008 年には高橋-竹内-窪田 [24] が中條-高橋 [16] にヒントを得て次の非拡大写像の不動点を求める次の点列近似法を提案した.

$$\begin{cases} x_0 = x \in H, \ Q_1 = C \ \& \ x_1 = P_{Q_1} x_0 \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ とし, P_{Q_n} は H から Q_n の上への距離射影とする. そして彼らは, この点列 $\{x_n\}$ が $P_{F(T)}x$ に強収束することを示した. ただし, $P_{F(T)}$ は C から $F(T)$ の上への距離射影である. この手法は縮小射影法 (shrinking projection method) と呼ばれている.

これら 2 つの手法には, 距離射影の概念が重要となってくる. ここで, H から C の上への距離射影 (metric projection) P_C とは, 任意の H の 元 x に対して次で定義される.

$$P_C x = \operatorname*{argmin}_{y \in C} \|x - y\|.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47H09, Secondary 47H10, 47J25.
Key words and phrases. 準非拡大写像, サニー準非拡大射影, サニー準非拡大レトラクト, 不動点, ハイブリッド法, 縮小射影法.

この距離射影は次の重要な性質を持っている. すなわち H の元 x と C の元 x_0 に対して, $x_0 = P_C x$ であることの必要十分条件は, 任意の C の元 y に対して

$$\langle x - x_0, x_0 - y \rangle \geq 0 \tag{1.1}$$

が成り立つことである. この性質を用いると P_C が非拡大写像になることがわかる.

一方, 距離射影の概念はバナッハ空間の場合にも拡張される. バナッハ空間での距離射影 (metric projection) とサニー非拡大射影 (sunny nonexpansive retraction) の2つの射影は古くから知られていた. 1996年に Alber [1] は第3の射影である準距離射影 (generalized projection) の概念を導入した. さらに近年, 茨木-高橋 [3,5] は第4の射影であるサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) の概念を導入した. これらの射影はヒルベルト空間上の距離射影の自然な拡張になっている. それはこれらの射影の性質を比較してみるとよくわかる. 比較しやすいよう E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とする. C を E の閉凸集合とし, P_C, Π_C, Q_C, R_C をそれぞれ E から C の上への距離射影, 準距離射影, サニー非拡大射影, サニー準非拡大射影とする. このとき, E の元 x と C の元 x_0 に対して,

$$\begin{aligned}
x_0 = P_C x &\iff \langle J(x - x_0), x_0 - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\
x_0 = \Pi_C x &\iff \langle Jx - Jx_0, x_0 - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\
x_0 = Q_C x &\iff \langle x - x_0, J(x_0 - y) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\
x_0 = R_C x &\iff \langle x - x_0, Jx_0 - Jy \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C
\end{aligned}$$

である. ただし, J は E の双対写像 (duality mapping) である. ヒルベルト空間上での距離射影の重要な性質 (1.1) を考慮すると, これら4つの非線形射影はバナッハ空間への拡張と考えたとき自然な拡張であると言えよう. 実際, この4つの射影をヒルベルト空間で考えると全て同じ射影となることは容易にわかる. なぜなら, ヒルベルト空間では双対写像 J は恒等写像 I となり, この4つの性質は (1.1) と一致するからである ([3,5] を参照). さらに, これらの非線形射影はヒルベルト空間と同様に非拡大の性質を持っている.

距離射影	⇒	距離写像 (metric operator)
準距離射影	⇒	擬非拡大写像 (relatively nonexpansive mapping)
サニー非拡大射影	⇒	非拡大写像 (nonexpansive mapping)
サニー準非拡大射影	⇒	準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping)

本論文では, 筆者がここ数年着目して研究を進めているバナッハ空間上の準非拡大写像に関しての不動点近似法をサニー準非拡大射影を用いて議論する. まず始めに, ハイブリッド法及び縮小射影法を用いて準非拡大写像の不動点を求める2つの強収束定理を得る. 次に, この結果を利用して, 凸最少化問題と制約可能性問題をバナッハ空間で議論する.

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $\|x\| = \|y\| = 1$ となる E の元 x, y $(x \neq y)$ に対して, つねに $\|x + y\| < 2$ が成り立つことである. 同様に, 一様凸 (uniformly convex) であるとは, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, つねに $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ となることである.

バナッハ空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを, E の双対写像 (duality mapping) と呼ぶ.

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $S(E)$ の元 x, y に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

バナッハ空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の $S(E)$ の元 y に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 x に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) であるという. 任意の $S(E)$ の元 x に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 y に関して一様に収束するとき, E のノルムが Fréchet 微分可能 (Fréchet differentiable) であるという. (2.1) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Fréchet 微分可能 (uniformly Fréchet differentiable) であるという. このとき, 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう.

多価写像 $T \subset E \times E^*$ に対して, T の定義域と T の値域は

$$D(T) = \{x \in E : Tx \neq \emptyset\}, \ R(T) = \cup\{Tx : x \in D(T)\}$$

で定義される. 多価写像 $T \subset E \times E^*$ が単調作用素 (monotone operator) であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in T$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

がつねに成り立つことと定義する. 多価写像 T が狭義単調作用素 (strictly monotone operator) であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in T(x \neq y)$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$$

がつねに成り立つことと定義する. また, 単調作用素 T が極大 (maximal) であるとは, T を真に含む単調作用素 $S \subset E \times E^*$ が存在しないときいう. すなわち, $S \subset E \times E^*$ が単調作用素で, かつ $T \subset S$ であるならば, $T = S$ となるときをいう. T が極大単調作用素ならば, $T^{-1}0 = \{u \in E : 0 \in Tu\}$ は閉凸集合となる. E が回帰的で狭義凸ならば, 単調作用素 T が極大になる必要十分条件は, 任意の $\lambda > 0$ に対して, $R(J + \lambda T) = E^*$ となることである ([2,22] を参照).

バナッハ空間 E での双対写像 J とノルムの微分可能性に関しては次の性質が知られている ([2,21,22] を参照).

(1) E の元 x に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合である;
(2) J は単調作用素である;
(3) E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が 1 対 1 となることである.
すなわち, $x \neq y \ \Rightarrow \ Jx \cap Jy = \emptyset$;
(4) E が狭義凸であるための必要十分条件は J が狭義単調作用素となることである;
(5) E が回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間なら, E^* の双対写像 J_* は J の逆像となる. すなわち, $J_* = J^{-1}$ である;
(6) E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射となることである;
(7) E が滑らかであるための必要十分条件は, J が一価になることである.

3. 準非拡大写像とサニー準非拡大射影

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E の双対写像とする. このとき, E の元 x, y に対して,

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. この関数 V に関しては次のような性質が知られている ([1,11,15] を参照).

(1) E の元 x, y に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq V(x, y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
(2) E の元 x, y, z に対して, $V(x, y) = V(x, z) + V(z, y) + 2\langle x - z, Jz - Jy \rangle$ である;
(3) E が狭義凸ならば, E の元 x, y に対して $V(x, y) = 0$ であるための必要十分条件は $x = y$ である.

C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C から C への写像 T が準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空集合でなく, かつ任意の C の元 x と $F(T)$ の元 y に対して,

$$V(Tx, y) \leq V(x, y)$$

がつねに成り立つことと定義する ([3,5] を参照). ただし, $F(T)$ は写像 T の不動点の集合, すなわち $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$ である. C の元 p が T の 準漸近的不動点 (generalized asymptotic fixed point) であるとは, Jx_n が Jp に弱 * 位相の意味で収束し $\lim_{n\to\infty}(Jx_n - JTx_n) = 0$ を満たす点列 $\{x_n\} \subset C$ が存在することと定義する. このとき, T の準漸近的不動点の集合を $\check{F}(T)$ で表す. 準非拡大写像の準漸近的不動点に関しては次の補助定理が知られている.

補助定理 3.1 ([8,14]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, C から C への写像 T を非拡大写像で $F(T)$ が空集合でないとする. このとき, T は準非拡大写像かつ $F(T) = \check{F}(T)$ となる.

E をバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき, E から D への写像 R がサニー (sunny) であるとは, 任意の E の元 x と $t \geq 0$ に対して

$$R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$$

が成り立つことである. 同様に, E から D への写像 R が射影 (retraction) であるとは, 任意の D の元 x に対して, $Rx = x$ が成り立つことである. これらの写像に関して次の補助定理が知られている.

補助定理 3.2 ([3,5]). E を滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. また R_D を E から D の上への射影とする. このとき, R_D がサニーかつ準非拡大写像になる必要十分条件は, 任意の E の元 x と D の元 y に対して,

$$\langle x - R_D x, JR_D x - Jy \rangle \geq 0$$

となることである. ただし, J は E の双対写像である.

E が滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を空でない集合とする. このとき, E から D の上へのサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) は一意に決まる. そこで, 滑らかで狭義凸なバナッハ空間の場合に, E から D の上へのサニー準非拡大射影を R_D で表すことにする. D を E の空でない集合とする. このとき, D が E のサニー準非拡大レトラクト (sunny generalized nonexpansive retract) であるとは, E から D の上へのサニー準非拡大射影が存在するときと定義する. サニー準非拡大射影の不動点集合はもちろん D である ([3,5] を参照). サニー準非拡大射影とサニー準非拡大レトラクトに関しては次の 2 つの結果が知られている.

定理 3.3 ([12]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき次の条件は同値になる.

(1) D はサニー準非拡大レトラクトである;
(2) JD は閉凸集合である.

このとき, D は閉集合となる.

補助定理 3.4 ([8]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でないサニー準非拡大レトラクトとする. また R_D を E から D の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, $\check{F}(R) = F(R) = D$ が成り立つ.

4. 強収束定理

本節では, ハイブリッド法と縮小射影法を用いた準非拡大写像の不動点への強収束定理を議論する. それには, 準非拡大写像の不動点集合に関して次の補助定理が必要である.

補助定理 4.1 ([8]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像とする. このとき, $F(T)$ は E のサニー準非拡大レトラクトになる.

茨木-高橋 [8] はハイブリッド法を利用した準非拡大写像の不動点への強収束定理を得た.

定理 4.2 ([8]). E を一様に滑らかで一様凸バナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像で, $\check{F}(T) = F(T)$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in E$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ H_n = \{z \in E : V(y_n, z) \le V(x_n, z)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x_1 - x_n, Jx_n - Jz\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = R_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たすとする. このとき点列 $\{x_n\}$ は $R_{F(T)}x$ に強収束する. ここで, $R_{F(T)}$ は E から $F(T)$ の上へのサニー準非拡大射影である.

次に, 茨木-高橋 [10] は縮小射影法を利用した準非拡大写像の不動点への強収束定理も得た.

定理 4.3 ([10]). E を一様に滑らかで一様凸バナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像で, $\check{F}(T) = F(T)$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in E$, $Q_1 = E$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : V(y_n, z) \le V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ を満たすとする. このとき点列 $\{x_n\}$ は $R_{F(T)}x$ に強収束する. ここで, $R_{F(T)}$ は E から $F(T)$ の上へのサニー準非拡大射影である.

これら定理 4.2 及び 4.3 と補助定理 3.1 の直接的な結果として, 次のようなヒルベルト空間の非拡大写像の不動点への強収束定理を得ることができる.

定理 4.4. H をヒルベルト空間とし, T を H から H への非拡大写像で, $F(T)$ が空でないとする. このとき, $x_1 = x \in E$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ H_n = \{z \in E : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x_1 - x_n, Jx_n - Jz\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たすとする. このとき点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}x$ に強収束する. ここで, $P_{F(T)}$ は E から $F(T)$ の上への距離射影である.

定理 4.5. H をヒルベルト空間とし, T を H から H への非拡大写像で, $F(T)$ が空でないとする. このとき, $x_1 = x \in E$, $Q_1 = E$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = R_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ を満たすとする. このとき点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}x$ に強収束する. ここで, $P_{F(T)}$ は E から $F(T)$ の上への距離射影である.

5. 凸最小化問題

H を実ヒルベルト空間とし, $f: H \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. このとき

$$f(u) = \min_{x \in H} f(x)$$

を満たす元 u を求める問題を, 凸最小化問題 (convex minimization problem) という. ここで, H の元 x に対して,

$$\partial f(x) = \{z \in H : f(y) \geq \langle y - x, z \rangle + f(x),\ \forall y \in H\}$$

を対応させる H から H の多価写像 ∂f を f の劣微分 (subdifferential) という. このとき, ∂f は極大単調作用素 (maximal monotone operator) になることが知られている. また, $f(u) = \min_{x \in H} f(x)$ であることと, $0 \in \partial f(u)$ であることは同値であることも知られている. このことから凸最小化問題は, 極大単調作用素 $T \subset H \times H$ に対して,

$$0 \in Tu \tag{5.1}$$

を満たす元 u を求める問題に帰着することができる. このような元 u を T の零元 (zero point) という. また, この問題は凸最小化問題だけでなく, 変分不等式問題, ミニマックス問題等の多くの非線形問題を一般化した問題でもある. この極大単調作用素の零元を求める問題 (5.1) を解く代表的な手法に近接点法 (proximal point algorithm) がある: 初期点を $x_1 \in H$ とし,

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.2}$$

で点列を構成する. ただし, $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ であり, 任意の $r > 0$ に対して $J_r = (I + rT)^{-1}$ である. このような J_r は T のリゾルベント (resolvent) と呼ばれる. この近接点法は 1970 年に Martinet [13] により導入され, 1976 年に Rockafellar [18] により, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ かつ $T^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば (5.2) で定義された点列 $\{x_n\}$ は $T^{-1}0$ の元へ弱収束することが示された. この研究以降, ヒルベルト空間の近接点法はさまざまな形で行われてきており, さらにその結果をバナッハ空間で議論することも活発に行われている.

ヒルベルト空間のリゾルベントの概念をバナッハ空間で論じる場合, 3 つのリゾルベントが知られている. ヒルベルト空間での極大単調作用素をバナッハ空間で論じる場合, 極大単調作用素 (maximal monotone operator) と m-増大作用素 (m-accretive operator) に分かれる. E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, その共役空間を E^* とする. $T \subset E \times E^*$ を極大単調作用素, $A \subset E \times E$ を m-増大作用素とする. このとき, E の元 x と $r > 0$ に対して, 3 つのリゾルベントは以下で定義される.

$$\begin{aligned} P_r x &= \{z \in E : 0 \in J(z - x) + rTz\}, \\ Q_r x &= \{z \in E : 0 \in (z - x) + rAz\}, \\ \Pi_r x &= \{z \in E : 0 \in (Jz - Jx) + rTz\}. \end{aligned}$$

ただし, J は E の双対写像である. この 3 つのリゾルベントに関しては, これまで多くの研究者によって近接点法の研究がなされてきた. 近年の研究において, 茨木-高橋 [5] はこれらとは異なるバナッハ空間での第 4 のリゾルベントとなる準リゾルベント (generalized resolvent) の概念を導入した. E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, その共役空間を E^* とする. このとき, 単調作用素 $B \subset E^* \times E$ が極大ならば, 任意の $r > 0$ に対して, $E = R(I + rBJ)$ である ([5] 参照). ここで, 任意の E の元 x と $r > 0$ に対して,

$$R_r x = \{z \in E : x \in z + rBJz\}$$

とすると, $R_r x$ は一価となる. このとき, R_r は $(I + rBJ)^{-1}$ で記述される. このような R_r を B の準リゾルベントを呼ぶこととする ([5,7] を参照). 準リゾルベントに関しては次の性質が知られている.

補助定理 5.1 ([5,6]). E が回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たす極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき, 次の性質が成立する.

(1) 任意の $r > 0$ に対して, $D(R_r) = E$,
(2) 任意の $r > 0$ に対して, $(BJ)^{-1}0 = F(R_r)$,
(3) $(BJ)^{-1}0$ は閉集合,
(4) 任意の $r > 0$ に対して, $R_r : E \to E$ は準非拡大写像になる.

補助定理 5.2 ([5, 12]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たす極大単調作用素とする. このとき, $(BJ)^{-1}0$ はサニー準非拡大レトラクトになる.

補助定理 5.1 及び 5.2 と 定理 4.2 及び 4.3 の直接的な結果として, 問題 (5.1) に関する次の 2 つの強収束定理を得ることができる.

定理 5.3 ([8]). E を一様に滑らかで一様凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき, $x_1 = x \in E$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) R_r x_n, \\ H_n = \{z \in E : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x_1 - x_n, Jx_n - Jz \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = R_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たすとする. このとき $B^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{(BJ)^{-1}0}x$ に強収束する. ここで, $R_{(BJ)^{-1}0}$ は E から $(BJ)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

定理 5.4. E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき, $x_1 = x \in E$, $Q_1 = E$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) R_r x_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$ を満たすとする. このとき $B^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{(BJ)^{-1}0}x$ に強収束する. ここで, $R_{(BJ)^{-1}0}$ は E から $(BJ)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

次に, 凸最小化問題を議論する. E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. $f^* : E^* \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数としたとき, f^* の劣微分は

$$\partial f^*(x^*) = \{z \in E : f^*(y^*) \geq \langle y^* - x^*, z \rangle + f^*(x^*), \ \forall y^* \in E^*\}$$

で定義される. このとき, 劣微分 $\partial f^* \subset E^* \times E$ は極大単調作用素であり, $f^*(u^*) = \min_{x^* \in E^*} f^*(x^*)$ であることと, $0 \in \partial f^*(u^*)$ であることは同値であることも分かる. また, 劣微分 ∂f^* の準リゾルベント R_r は, E の元 x と $r > 0$ に対して

$$R_r x = (I + r\partial f^* J)^{-1} x = J_* \left(\operatorname*{argmin}_{y^* \in E^*} \left\{ f^*(y^*) + \frac{1}{2r}\|y^*\|^2 - \frac{1}{r}\langle x, y^* \rangle \right\} \right) \tag{5.3}$$

となる. ただし, J_* は E^* の双対写像である. この式 (5.3) と定理 5.3 及び 5.4 の直接的な結果から, 凸最小化問題に関する次の 2 つの強収束定理を得ることができる.

定理 5.5 ([8]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $f^*: E^* \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. このとき, $x_1 = x \in E$ とし,

$$\begin{cases} y_n^* = \operatorname*{argmin}_{y^* \in E^*} \left\{ f^*(y^*) + \frac{1}{2r}\|y^*\|^2 - \frac{1}{r}\langle x_n, y^* \rangle \right\}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_* y_n^*, \\ H_n = \{z \in E : V(y_n, z) \le V(x_n, z)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x_1 - x_n, Jx_n - Jz \rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = R_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. ただし, J_* は E^* の双対写像で, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たすとする. このとき $(\partial f^*)^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{(\partial f^* J)^{-1}0} x$ に強収束する. ここで, $R_{(\partial f^* J)^{-1}0}$ は E から $(\partial f^* J)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

定理 5.6. E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $f^*: E^* \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. このとき, $x_1 = x \in E$, $Q_1 = E$ とし,

$$\begin{cases} y_n^* = \operatorname*{argmin}_{y^* \in E^*} \left\{ f^*(y^*) + \frac{1}{2r}\|y^*\|^2 - \frac{1}{r}\langle x_n, y^* \rangle \right\}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_* y_n^*, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : V(y_n, z) \le V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. ただし, J_* は E^* の双対写像で, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ を満たすとする. このとき $(\partial f^*)^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{(\partial f^* J)^{-1}0} x$ に強収束する. ここで, $R_{(\partial f^* J)^{-1}0}$ は E から $(\partial f^* J)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

6. 制約可能性問題

H を実ヒルベルト空間とし, $\{C_i\}_{i=1}^r$ を H の空でない閉凸集合の族で $C_0 = \cap_{i=1}^r C_i$ が空集合でないとする. このとき, 制約可能性問題 (feasibility problem) とは H から C_i の上への距離射影 P_{C_i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$ のみを用いた点列近似法で C_0 の元 z を求める問題である. 本節では, ヒルベルト空間の距離射影のバナッハ空間への拡張であるサニー準非拡大射影を用いた制約可能性問題を議論する. ここでは, 有限個の写像の凸結合から生成される W 写像と呼ばれる写像と積写像を用いた 2 つの点列近似法を扱う.

高橋 [20] は有限個の非拡大写像の共通不動点を求めるために有限個の写像の凸結合からなる W-写像 (W-mapping) という写像を導入した; C をバナッハ空間 E の空でない凸集合とし, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を C から C への r 個の写像とし, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ を r 個の実数で $0 \le \beta_i \le 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ を満たすものとする. このとき, C から C への写像 W を

$$\begin{aligned} U_1 &= \beta_1 T_1 + (1-\beta_1) I, \\ U_2 &= \beta_2 T_2 U_1 + (1-\beta_2) I, \\ &\vdots \\ U_{r-1} &= \beta_{r-1} T_{r-1} U_{r-2} + (1-\beta_{r-1}) I, \\ W = U_r &= \beta_r T_r U_{r-1} + (1-\beta_r) I \end{aligned}$$

で定義する ([23] を参照). このような写像 W は, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ によって生成される W-写像といわれる. 有限個のサニー準非拡大写像の W-写像に関しては次の補助定理が得られている.

補助定理 6.1 ([9]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^r D_i$ が空でない E の r 個のサニー準非拡大レトラクトとする. $R_1, R_2, \ldots, R_r$ を E から D_i の上

へのサニー準非拡大射影とし, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ を $0 < \beta_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる r 個の実数とする. また, W を $R_1, R_2, \ldots, R_r$ と $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ によって生成される W-写像とする. このとき, W は準非拡大写像かつ,

$$\check{F}(W) = F(W) = \bigcap_{i=1}^{r} D_i$$

である.

この補助定理 6.1 と 定理 4.2 及び 4.3 の直接的な結果として, 制約可能性問題に関連する次の 2 つの強収束定理を得ることができる.

定理 6.2 ([9]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^{r} D_i$ が空でない E の r 個のサニー準非拡大レトラクトとする. $R_1, R_2, \ldots, R_r$ を E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とし, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ を $0 < \beta_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる r 個の実数とする. また, W を $R_1, R_2, \ldots, R_r$ と $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ によって生成される W-写像とする. $\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in E$ とし,

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) W x_n, \\ H_n = \{z \in E : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x - x_n, Jx_n - Jz \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = R_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $R_{\cap_{i=1}^{r} D_i} x$ に強収束する. ただし, $R_{\cap_{i=1}^{r} D_i}$ は E から $\cap_{i=1}^{r} D_i$ の上へのサニー準非拡大射影とする.

定理 6.3. E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^{r} D_i$ が空でない E の r 個のサニー準非拡大レトラクトとする. $R_1, R_2, \ldots, R_r$ を E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とし, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ を $0 < \beta_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる r 個の実数とする. また, W を $R_1, R_2, \ldots, R_r$ と $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ によって生成される W-写像とする. $\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in E$, $Q_1 = E$ とし,

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) W x_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $R_{\cap_{i=1}^{r} D_i} x$ に強収束する. ただし, $R_{\cap_{i=1}^{r} D_i}$ は E から $\cap_{i=1}^{r} D_i$ の上へのサニー準非拡大射影とする.

最後に, 有限個のサニー準非拡大射影の積写像を用いた不動点近似法を議論する. その為には, 次の補助定理が必要となる.

補助定理 6.4 ([9]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^{r} D_i$ が空でない E の r 個のサニー準非拡大レトラクトとする. $R_1, R_2, \ldots, R_r$ を E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, $R_r R_{r-1} \cdots R_1$ は準非拡大写像かつ,

$$\check{F}(R_r R_{r-1} \cdots R_1) = F(R_r R_{r-1} \cdots R_1) = \bigcap_{i=1}^{r} D_i$$

である.

この補助定理 6.4 と定理 4.2 及び 4.3 の直接的な結果として, 制約可能性問題に関連する次の 2 つの強収束定理を得ることができる.

定理 6.5 ([9]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^r D_i$ が空でない E の r 個のサニー準非拡大レトラクトとする. $R_1, R_2, \ldots, R_r$ を E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とする. $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in E$ とし,

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) R_r R_{r-1} \cdots R_1 x_n, \\ H_n = \{z \in E : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x - x_n, Jx_n - Jz \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = R_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $R_{\cap_{i=1}^r D_i} x$ に強収束する. ただし, $R_{\cap_{i=1}^r D_i}$ は E から $\cap_{i=1}^r D_i$ の上へのサニー準非拡大射影とする.

定理 6.6. E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, , $D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^r D_i$ が空でない E の r 個のサニー準非拡大レトラクトとする. $R_1, R_2, \ldots, R_r$ を E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とする. $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in E$, $Q_1 = E$ とし,

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) R_r R_{r-1} \cdots R_1 x_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $R_{\cap_{i=1}^r D_i} x$ に強収束する. ただし, $R_{\cap_{i=1}^r D_i}$ は E から $\cap_{i=1}^r D_i$ の上へのサニー準非拡大射影とする.

References

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems* Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 1990.

[3] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 **1484** (2006), 150–160.

[4] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorem for new nonexpansive mappings in Banach spaces and its applications*, Taiwanese J. Math. **11** (2007), 929–944.

[5] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[6] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorem by a hybrid method for generalized resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **9** (2008), 71–81.

[7] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retracts and convergence theorem for generalized resolvents in a Banach space*, in Fixed Point theory and its Applications (S. Dhompongsa, K. Goebel, W. A. Kirk, S. Plubtieng, B. Sims and S. Suantai, eds.), Yokohama Publishers, 2008, 83–93.

[8] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive mappings and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, Nonlinear Analysis and Optimization, Contemp. Math. , AMS, to appear.

[9] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a finite family of nonlinear operators of firmly nonexpansive type in Banach spaces*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (S. B. Hsu, H. C. Lai, L. J. Lin, W. Takahashi, T. Tanaka and J. C. Yao, eds.), Yokohama Publishers, 2009, 49–62.

[10] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for finite generalized nonexpansive mappings in Banach spaces*, to appear.

[11] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[13] B. Martinet, *Régularsation d'inéquations variationnells par approximations successives* (in French), Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelles **4** (1970), 154–158.

[14] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.
[15] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.
[16] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372-379.
[17] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances* Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 178, Dekker, New York, 1996, 313–318.
[18] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and proximal point algorithm*, SIAM J. Control. Optim. **14** (1976), 877–898. **4** (1953), 506–510.
[19] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Programming Ser. A. **87** (2000), 189–202.
[20] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A **51** (1997), 277–292.
[21] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.
[22] 高橋涉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.
[23] W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, Math. Comput. Modeling **32** (2000), 1463–1471.
[24] W. Takahashi, Y Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anał. Appl. **341** (2008), 276–286.